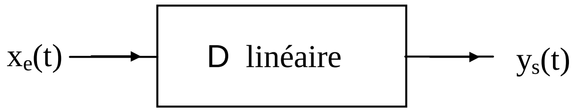
REGIME SINUSOÏDAL FORCE

A. REGIME SINUSOIDAL FORCE

I. Rappel : régime transitoire - régime forcé (ou établi ou permanent)



- **Régime transitoire et régime permanent**

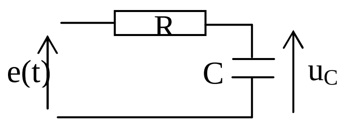
La réponse d'un dipôle linéaire (condensateur, résistance, bobine...) à la grandeur d'entrée $x_e(t)$ est :
$y_s(t) = y_l(t) + y_e(t)$ avec :
* $y_s(t)$: solution générale de l'équation différentielle avec second membre reliant $y_s(t)$ à $x_e(t)$.
* $y_l(t)$: solution générale de l'équation sans second membre ("excitation " nulle - sources éteintes) = **régime libre**.
*$y_e(t)$: solution particulière de l'équation avec second membre = **régime forcé (ou régime établi ou régime permanent).**

Tant que le régime libre n'est pas négligeable devant le régime forcé, **on parle de régime transitoire alors $y_s(t) = y_l(t) + y_e(t)$.**
Pour un système stable, $y_l(t)$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini (physiquement pour t >> τ, τ = temps de réponse caractéristique du circuit ou temps de relaxation) et **$y_s(t) = y_e(t)$: on parle de régime permanent**.
Ces deux régimes (permanent et transitoire) sont toujours présents et il faut bien les distinguer même si on néglige la plupart du temps le transitoire vu sa courte durée de vie (quelques τ).

- **Régime sinusoïdal forcé (ou régime sinusoïdal permanent ou régime sinusoïdal établi)**

La réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale est sinusoïdale de même pulsation que l'excitation. Si la grandeur d'entrée ("excitation") est sinusoïdale : $x_e(t) = X_M.\cos(\omega.t)$ alors $y_e(t) = Y_M.\cos(\omega.t + \varphi)$.
On désigne par régime harmonique le régime sinusoïdal établi : $y_s(t) = y_e(t) = Y_M.\cos(\omega.t + \varphi)$

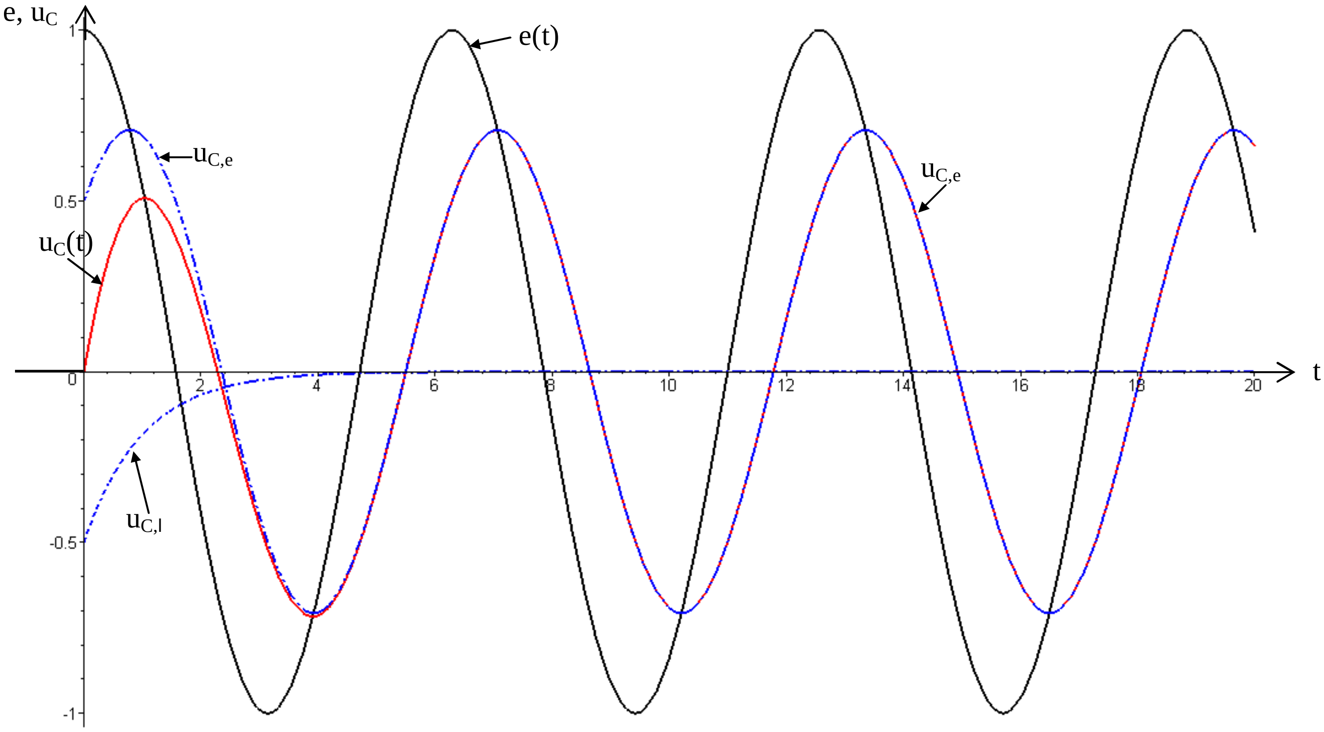
Exemple : **Circuit R-C série**



On applique à t = 0, une tension sinusoïdale $x_e = e(t) = E.\cos(\omega.t)$.
$y_s = u_C$ (par exemple) avec $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$ (condensateur initialement déchargé).
Equation différentielle pour t >0 : $u_C + \tau.\dfrac{du_C}{dt} = E.\cos(\omega.t)$
Solution pour t>0 : $u_C = A.e^{-t/\tau} + U_M.\cos(\omega.t + \varphi) = \underbrace{-U_M.\cos(\varphi).e^{-t/\tau}}_{u_{C,l}} + \underbrace{U_M.\cos(\omega.t + \varphi)}_{u_{C,e}}$

Pour t >> τ (régime sinusoïdal forcé) : $u_C = u_{C,e} = U_M.\cos(\omega.t + \varphi)$. Pour la détermination de U_M et φ voir § III.

➢ *Voir courbe au verso*



II. Intérêt de la réponse d'un système à une excitation sinusoïdale (*Physique SPE*)

Un signal périodique x(t) de période $\boxed{T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}}$ peut être décomposé en une somme de signaux sinusoïdaux appelée ***série de Fourier*** :

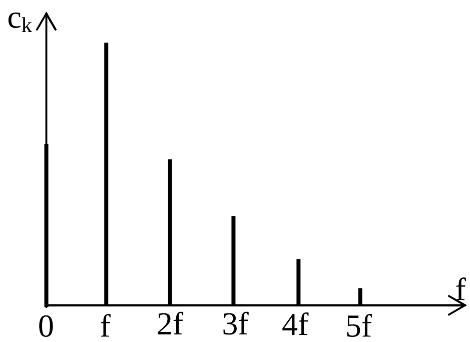
$$x(t) = a_o + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k.\cos(k.\omega.t) + b_k.\sin(k.\omega.t)\right] = a_o + \sum_{k=1}^{\infty} c_k.\cos(k.\omega.t + \varphi_k) = a_o + \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t) \qquad \text{avec } k \in N$$

* $a_1.\cos(\omega.t) + b_1.\sin(\omega.t) = c_1.\cos(\omega.t+\varphi_1) = x_1$: terme fondamental (même fréquence que le signal x(t))
* $a_k.\cos(k.\omega.t) + b_k.\sin(k.\omega.t) = c_k.\cos(k.\omega.t+\varphi_k) = x_k$: harmonique de rang k (de pulsation = k.ω)

Si la réponse à un signal test sinusoïdal est connue, la réponse à x(t) l'est : **propriété des systèmes linéaires**.

$y_s(t) = y_o + \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t)$ où $y_k(t)$ réponse à $x_k(t)$ est sinusoïdal de pulsation k.ω (période T/k).

Remarque : Un signal périodique (de fréquence f) est caractérisé par son spectre en fréquence (figure ci-dessous).



Exemple : *signal carré*

x(t) = A pour 0 < t < T/2 ; x(t) = - A pour T/2 <t<T

$$x(t) = \frac{4A}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin[(2k+1).\omega.t]}{2k+1}$$

III. Grandeurs sinusoïdales

1) Caractéristiques et propriétés

Soit x(t) une grandeur sinusoïdale : $\mathbf{x(t) = X_M.cos(\omega t + \varphi)}$ ou $x(t) = X_M.\sin(\omega t + \varphi)$.

* X_M : amplitude
* ω : pulsation ($rad.s^{-1}$)
* $\omega t + \varphi$: phase instantanée (rad)
* φ : phase initiale

Une grandeur x(t) sinusoïdale est : **(voir grandeurs périodiques TP instrumentation électrique)**

* **Périodique** : période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$; fréquence $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$
* **Alternative** : $< x > = 0$; **valeur efficace** $\boxed{\mathbf{X} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \dfrac{X_M}{\sqrt{2}}}$ (on note parfois $x(t) = X\sqrt{2}.\cos(\omega t + \varphi)$)

Une grandeur sinusoïdale sera définie par 3 grandeurs : ω (ou T ou f) ; X_M (ou X) et φ.

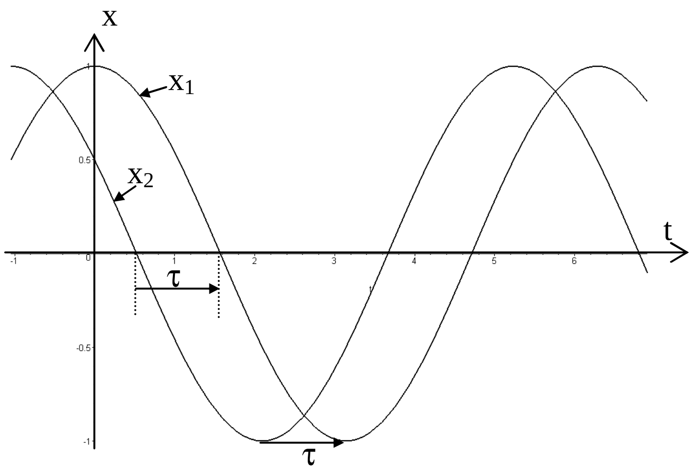
Remarque : La phase initiale n'a réellement de sens que si l'on considère plusieurs grandeurs sinusoïdales de même pulsation.

- **Différence de phase entre deux signaux synchrones (voir mesure de déphasage TP instrumentation électrique)**

Soit deux signaux sinusoïdaux synchrones (de même période) : $x_1 = X_{M1}.\cos(\omega t)$ - choix de l'origine des temps telle que $\varphi_1 = 0$ - et $x_2 = X_{M2}.\cos(\omega t + \varphi)$.

$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ = déphasage de x_2 par rapport à x_1 est directement lié à l'avance temporelle τ de x_2 par rapport à x_1 : $\tau = \varphi/\omega$.

Si φ - donc τ - est positif, x_2 est en avance sur x_1 ; si φ - donc τ - est négatif, x_2 est en retard sur x_1.



Exemple :

$x_1 = X_1.\cos(\omega.t)$ $\quad x_2 = X_2.\cos(\omega.t + \dfrac{\pi}{3})$

2) Notation complexe d'une grandeur sinusoïdale

A la grandeur sinusoïdale $x(t)=X_M.\cos(\omega t+\varphi)$, on peut associer la grandeur complexe :

$\boxed{\underline{x(t)} = \underline{x} = X_M.e^{j(\omega t+\varphi)}}$ $\left(j = e^{j\frac{\pi}{2}} \text{ et } j^2 = -1 \right)$ avec $\boxed{\mathbf{x(t) = Re(\underline{x})}}$ (grandeur sinusoïdale **= grandeur réelle)**

On désigne par **amplitude complexe** le nombre $\boxed{\underline{X_M} = X_M.e^{j\varphi}}$ et par **valeur efficace complexe** le nombre $\boxed{\underline{X} = X.e^{j\varphi}}$ ($\underline{X_M} = \sqrt{2}.\underline{X}$).

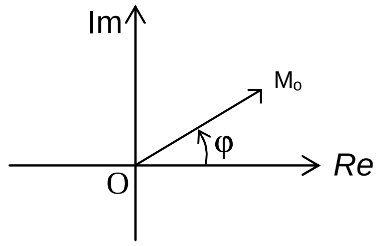
$\underline{X}$ ou $\underline{X_M}$ contiennent, sous forme commode, les renseignements sur la phase et la valeur efficace (ou l'amplitude) de x(t) : $\boxed{X = |\underline{X}| \text{ et } \varphi = Arg(\underline{X}) = Arg(\underline{X_M})}$.

Si la pulsation ω de x(t) est connue, $\underline{X}$ ou $\underline{X_M}$ suffit pour déterminer x(t).

Remarque : Représentation de Fresnel = représentation vectorielle de x(t)

La représentation de Fresnel d'une grandeur sinusoïdale x(t) est la représentation géométrique de la valeur efficace complexe $\underline{X}$ (ou de l'amplitude complexe $\underline{X_M}$) associée à x(t).

$x(t) \leftrightarrow \overrightarrow{OM_o}$ $\qquad \|\overrightarrow{OM_o}\| = X \text{ (ou } X_M) \quad (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM_o}) = \varphi$



La correspondance entre une fonction sinusoïdale et sa représentation complexe se conserve dans toutes les opérations **linéaires** (addition, soustraction, multiplication par une constante ...).
En effet, si x_1 et x_2 sont deux grandeurs sinusoïdales de même fréquence, x = $\alpha.x_1 + \beta.x_2$ (α et β réels) est sinusoïdale, de même fréquence, et à x(t) = $\alpha x_1 + \beta x_2$ on associe $\underline{x(t)} = \alpha.\underline{x_1} + \beta.\underline{x_2}$ ou $\underline{X} = \alpha.\underline{X_1} + \beta.\underline{X_2}$

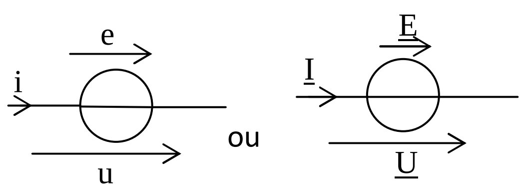
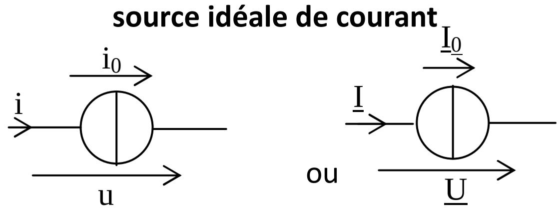
Intérêt de la notation complexe : simplification de l'étude des circuits linéaires en régime sinusoïdal forcé (résolution d'équation différentielle...) voir chapitres suivants.

Dérivée et primitive en notation complexe :

B. DIPÔLES LINEAIRES EN REGIME SINUSOIDAL FORCE

I. Dipôles actifs linéaires

Les grandeurs d'entrées $x_e(t)$ sont imposées par des sources idéales de tension ou de courant sinusoïdaux.

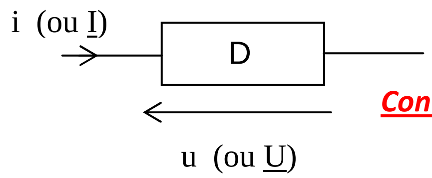
source idéale de tension	**source idéale de courant**
	
Grandeur sinusoïdale (grandeur réelle)	
∀ i, u(t) = e(t) = E $\sqrt{2}.\cos(\omega.t)$	$\forall u,\ i(t) = i_0(t) = I_0\sqrt{2}.\cos(\omega.t)$
Grandeur complexe associée	
$\forall \underline{I},\ \underline{U} = \underline{E} = E$	$\forall \underline{U},\ \underline{I} = \underline{I_0} = I_0$

Remarque : E et I_0 représentent les valeurs efficaces de la tension et du courant.

II. Dipôles linéaires passifs

1) Impédance et admittance complexes

Considérons un dipôle passif D parcouru par un courant i(t) = I_M.cos(ω.t) et soumis à une tension u(t) = U_M.cos(ω.t+φ) en régime sinusoïdal forcé (régime harmonique).



Convention récepteur

On désigne par :

* **Impédance complexe Z du dipôle D :** $\underline{\mathbf{Z}}(\mathbf{j\omega})=\dfrac{\underline{\mathbf{U}}}{\underline{\mathbf{I}}}$ $\boxed{\underline{Z}=\dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}=\dfrac{\underline{U_M}}{\underline{I_M}}=\dfrac{\underline{u(t)}}{\underline{i(t)}}}$

$Z=|\underline{Z}|=\dfrac{U}{I}$: impédance apparente de D (s'exprime en ohm Ω dans le S.I.)

$\mathrm{Arg}(\underline{Z})=\varphi_u-\varphi_i=\varphi$: déphasage de la tension aux bornes de D par rapport à l'intensité dans D.

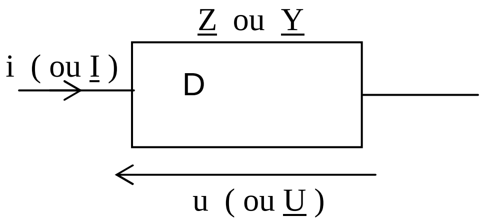
* **Admittance complexe Y du dipôle D :** $\underline{\mathbf{Y}}(\mathbf{j\omega})=\dfrac{\underline{\mathbf{I}}}{\underline{\mathbf{U}}}$ $\boxed{\underline{Y}=\dfrac{\underline{I}}{\underline{U}}=\dfrac{\underline{I_M}}{\underline{U_M}}=\dfrac{\underline{i(t)}}{\underline{u(t)}}}$

$Y=|\underline{Y}|=\dfrac{I}{U}$: admittance apparente de D (s'exprime en siemens S dans le S.I.)

$\mathrm{Arg}(\underline{Y})=\varphi_i-\varphi_u=\varphi'$: déphasage de l'intensité par rapport à la tension aux bornes de D.

Remarques : $\underline{Y}=\dfrac{1}{\underline{Z}} \quad\Rightarrow\begin{cases}Y=\dfrac{1}{Z}\\ \varphi'=-\varphi\end{cases}$

Ainsi tout dipôle passif linéaire est caractérisé, **en régime harmonique**, par son impédance Z ou son admittance Y telles que : **U = Z.I** ou **I = Y.U**
(**Attention toujours aux conventions d'orientation)**

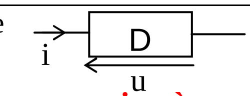
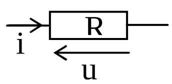
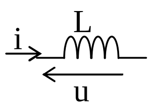
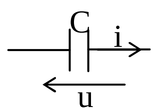


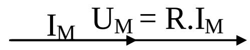
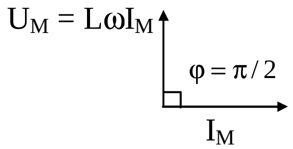
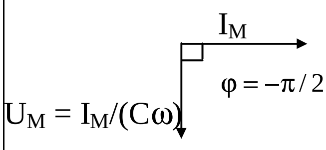
$\underline{Z}(j\omega)=R(\omega)+jX(\omega)$ R(ω) = Re(Z) = résistance de D (en Ω) R(ω) ≥ 0
X(ω) = Im(Z) = réactance de D (en Ω) X(ω) de signe quelconque

$\underline{Y}(j\omega)=G(\omega)+jB(\omega)$ G(ω) = Re(Y) = admittance de D (en S) G(ω) ≥ 0
B(ω) = Im(Y) = susceptance de D (en S) B(ω) de signe quelconque

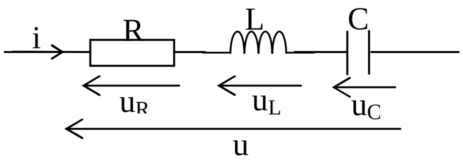
Si **X(ω) est positif** : le dipôle est dit de type **inductif** (φ_u - φ_i > 0 tension en avance sur l'intensité)
Si **X(ω) est négatif** : le dipôle est dit de type **capacitif** **(**φ_u - φ_i < 0 tension en retard sur l'intensité)
Si **X(ω)= 0** :le dipôle est équivalent à une résistance (φ_u = φ_i tension en phase avec l'intensité)

2) Dipôles fondamentaux i(t) = I_M.cos(ω.t) u(t) = U_M.cos(ω.t+φ)

Dipôle  **attention à l'orientation de u**	Résistor 	Bobine idéale 	Condensateur idéal 
Relation courant-tension	$u = R.i$	$u = L.\dfrac{di}{dt}$	$i = C.\dfrac{du}{dt}$

Notation complexe	$\underline{u} = R.\underline{i}$ $\underline{U_M} = R.\underline{I_M}$	$\underline{u} = j.L.\omega.\underline{i}$ $\underline{U_M} = j.L.\omega.\underline{I_M}$	$\underline{i} = j.C.\omega.\underline{u}$ $\underline{I_M} = j.C.\omega.\underline{U_M}$
Impédance complexe Admittance complexe	$\underline{Z} = R$ $\underline{Y} = G = \dfrac{1}{R}$ courant et tension en phase $\varphi_u - \varphi_i = 0$	$\underline{Z} = j.L.\omega$ $\underline{Y} = \dfrac{1}{j.L.\omega}$ u est en quadrature avance par rapport à i : $\varphi_u - \varphi_i = \dfrac{\pi}{2}$	$\underline{Z} = \dfrac{1}{j.C.\omega}$ $\underline{Y} = j.C.\omega$ u est en quadrature retard par rapport à i : $\varphi_u - \varphi_i = -\dfrac{\pi}{2}$
Représentation de Fresnel			
Comportement en fréquence $\omega \to 0$ (très basses fréquences) $\omega \to \infty$ (très hautes fréquences)	$\underline{Z}$ et $\underline{Y}$ indépendants de ω (donc de la fréquence)	* A très basse fréquence $\lvert\underline{Z}\rvert \to 0 \quad u \to 0 \ \forall i$ L équivalente à un court-circuit * A très haute fréquence $\lvert\underline{Y}\rvert \to 0 \quad i \to 0 \ \forall u$ L équivalente à un circuit ouvert	* A très basse fréquence $\lvert\underline{Y}\rvert \to 0 \quad i \to 0 \ \forall u$ C équivalente à un circuit ouvert * A très haute fréquence $\lvert\underline{Z}\rvert \to 0 \quad u \to 0 \ \forall i$ C équivalente à un court-circuit

3) Association de dipôles : exemple circuit R-L-C série



Grandeurs réelles

$$\begin{cases} u = u_R + u_L + u_C \\ u = R.i + L.\dfrac{di}{dt} + u_C \end{cases} \qquad i = C.\frac{du_C}{dt}$$

Notation complexe

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = R.\underline{I} + j.L.\omega.\underline{I} + \underline{U}_C \\ \underline{U}_C \ \text{ tel que } \ \underline{I} = j.C.\omega\underline{U}_C \end{cases} \qquad \underline{U} = \left(R + j.L.\omega + \frac{1}{j.C.\omega}\right).\underline{I} = \underline{Z}.\underline{I}$$

$$\underline{Z}(j\omega) = \underline{Z} = R + j.\left(L.\omega - \frac{1}{C.\omega}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lvert\underline{Z}\rvert = Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(L.\omega - \dfrac{1}{C.\omega}\right)^2} \\ \varphi_u - \varphi_i = \varphi = \mathrm{Arg}(\underline{Z}) \quad \text{avec } \tan(\varphi) = \dfrac{L.\omega - \dfrac{1}{C.\omega}}{R} \ \text{ et } \cos(\varphi) > 0 \quad -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le +\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Remarque : Diagramme de Fresnel